數學傳播　40卷4期, pp. 30-43

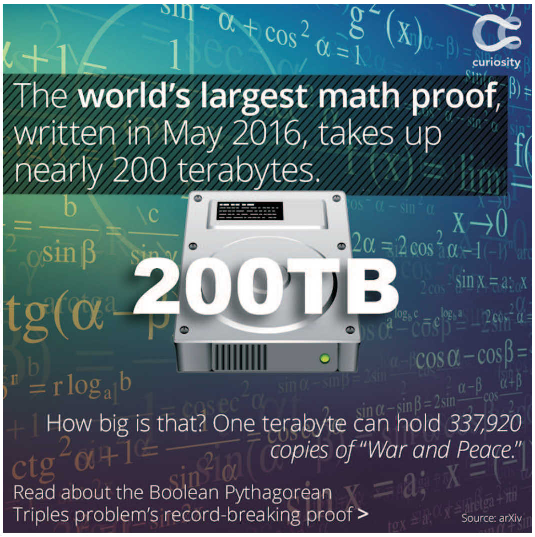
需要十億年才能看完世界最長的數學證明

李信明

生命太短了, 不該浪費時間去檢驗一個複雜而錯誤可能性又非常大的證明。

— 馬丁 · 加德納

2016年7月9日在法國波爾多 (Bordeaux) 舉辦國際 2016 年 SAT 電腦大會, 來自德州大學、肯塔基大學和英國斯旺西大學的三名數學家表示他們利用分塊攻克策略 (Cube-and-Conquer) 這種混合性的可滿足性測試方法, 解答及證明了來自 1970 年葛立恒 (Ron Graham, 1935∼) 和匈牙利的數學家保羅 · 厄多斯 (Paul Erdös , 1913∼1996) 提出的拉姆齊理論 (Ramsey Theory) 的布林畢氏三元數問題。2016 年 7 月 11 日世界各國報紙以《美英數學家攻克世界難題 證明過程若看完需 10 億年》的大標題報導轟動了世界的新聞。這是數學領域中的一項驚人消息、創造一個迄今爲止不曾有過的最長的數學證明。



轟動世界的新聞—世界最長的數學證明

在數學上, 判斷一件事情的語句叫做「命題」, 證明是在一個特定的公理系統中, 根據一定的規則或標準, 由公理和定理推導出某些命題的過程。三位教授承認要證明他們的解答正確很難, 因爲在德州先進運算中心超級電腦協助下產生的證明檔, 大小達到 200TB, 相當於美國國會圖書館所有數碼資料的總和, 這也是人類迄今得到的最「長」的一個數學「證明」。

美國理論物理學家理查 · 費曼 (Richard Feynman, 1918∼1988) 由於在量子電動力學的工作獲得 1965 年諾貝爾物理獎, 他在中學時期數學很好, 進入麻省理工學院, 原先是唸數學系, 後來覺得數學的實用性不強, 想轉讀電機工程, 最後決定唸物理專業。

他參與製造原子彈的曼哈頓計畫, 在洛斯阿拉莫 (Los Alamos) 他和一群來自歐洲和美國的卓越數學家, 像馮 · 諾依曼 (John von Neumann), 烏拉姆在一起工作。他曾對他們取笑:「你們數學家就是拿著顯而易見的事情證明給人看的人。」

馮諾曼, 費曼和烏拉姆在一起討論

他講的話沒有錯。

我們小學時期學習的整數和加法及乘法運算, 到了大學我們學習到整數是可以用義大利數學家皮亞諾 (Giuseppe Peano, 1858∼1932) 的公理系統定義, 而證明加法及乘法是滿足交換律 $a+b=b+a$, $a\times b=b\times a$, 並不是一件容易的事。

直觀上是對的東西, 不一定是正確。

“1 + 1 = 2”, 直觀上是對的, 也是正確。但是兩位英國數學家懷德海 (Alfred North Whitehead, 1861∼1947) 與伯特蘭 · 羅素 (Bertrand Russell, 1872∼1970) 爲了完善數學的基礎花了十多年的時間寫了一本三大卷的《數學原理》, 這是二十世紀最偉大的數學書近 2,000 頁。《數學原理》竟然在 360 頁之後才能介紹“1”, $1+1=2$ 要在 379 頁才能證明。

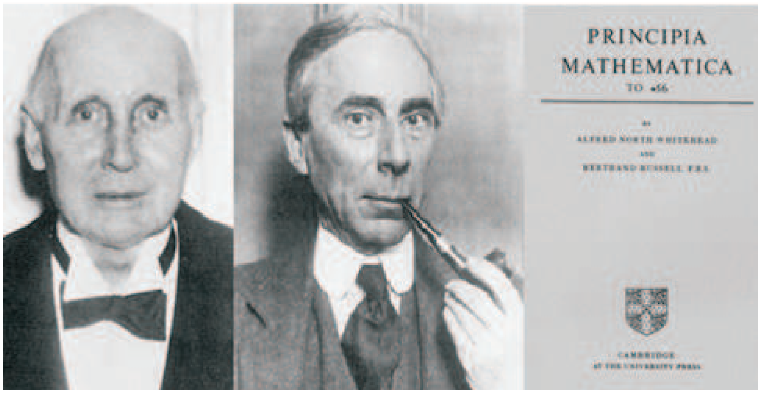
寫書給羅素帶來痛苦、焦慮, 在 1903 和 1904 年的夏天達到了高峰。

那段日子被他稱爲「徹底的智力僵局」(complete intellectual deadlock): 他每天早晨拿出一張白紙, 除午飯外, 整天就對著白紙枯坐, 卻往往一個字也寫不出, 認爲是江郎才盡。他

尼加拉瓜發行“1+1=2”的紀念郵票

常到牛津附近一座跨越鐵路的橋上去看火車, 在情緒悲觀時, 看著一列列火車駛過, 他有時會生出可怕的念頭: 也許明天乾脆臥軌了結此生。

寫完這書之後羅素很沮喪, 在給一位朋友的信中稱《數學原理》爲「一本愚蠢的書」(a foolish book), 飽受煎熬的羅素不再搞數學了。



懷德海與羅素合寫《數學原理》

1910~1913年出版的《數學原理》裡面有很多鬼畫符的怪符號, 讀者因爲內容晦澀難懂寥寥無幾, 羅素在1959 年《我的哲學的發展》(My Philosophical Development) 一書中表示半個世紀過了讀過《數學原理》後面部分的人據他所知只有六個!!

$*\mathbf{54\cdot 43}.\ \vdash :.\, \alpha,\beta\in 1.\supset :\alpha\cap\beta=\Lambda.\equiv.\,\alpha\cup\beta\in 2$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash.*54\cdot 26.\supset\vdash:.\,\alpha=\iota' x.\beta=\iota' y.\supset:\alpha\cup\beta\in 2.\equiv.\,x\neq y.\\
&[*51\cdot 231] \qquad \equiv.\,\iota' x\cap\iota' y=\Lambda.\\
&[*13\cdot 12] \qquad \equiv.\,\alpha\cap\beta=\Lambda \qquad (1)\\
&\vdash.(1).*11\cdot 11\cdot 35.\supset\\
&\qquad \vdash:.(\exists x,y).\alpha=\iota' x.\beta=\iota' y.\supset:\alpha\cup\beta\in 2.\equiv.\,\alpha\cap\beta=\Lambda \qquad (2)\\
&\vdash.(2).*11\cdot 54.*52\cdot 1.\supset\vdash.\,Prop
\end{aligned}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

《數學原理》證明1+1=2

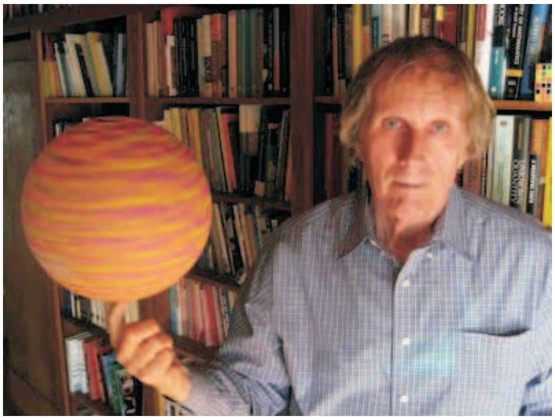
長期擔任牛津大學和劍橋大學的數學教授哈代 (G. H. Hardy) 是羅素的好友, 在 1940 年名著《一個數學家的辯白》(A Mathematician's Apology) 中轉述從羅素本人那裡聽來的一個噩夢 —— 那是:「西元 2100 年, 劍橋大學圖書館的管理員拿著一個桶子在書架間巡視, 要把沒用的書扔進桶裡處理掉, 管理員的腳步在三本大書前面停了下來, 羅素認出那正是自己的《數學原理》, 而且是最後倖存的一套。管理員把那三本書從書架上抽了出來, 翻了翻, 似乎被數學符號所困惑, 然後他闔上了書, 思索著是否該扔進桶裡 ⋯⋯」

哥德爾 (Kurt Gödel, 1906∼1978) 是 20 世紀的一位偉大的數理邏輯學家, 1906 年生於奧地利, 1930 年在維也納大學獲博士學位。1930 年夏天他提出第一不完備性定理:「任意一個包含算術系統在內的形式系統中, 都存在一個命題, 它在這個系統中既不能被證明, 也不能被否定。」通俗地講是「任何一門數學中都有這樣的命題, 從這門數學中的已知事實出發, 你不可能證明它對, 也不可能證明它不對。」「不完備性定理」是數理邏輯發展史上的一個重大研究成果, 是數學與邏輯發展史上又一個里程碑。

我們熟悉的哥德巴赫猜想, 直觀是對的, 但是「引無數英雄競折腰」, 260年過去了, 到現在還沒有人能夠證明它是正確的。—— 或許哥德巴赫猜想是不可判定的!

匈牙利數學家厄多斯是 20 世紀數學論文最多的數學家 (讀者可看 2015 年上海科學技術出版社出版的李學數《數學與數學家的故事, 第1冊》《20世紀數學論文最多的數學家 —- 紀念保羅 · 厄多斯》一文) 。他和葛立恒問:「是否存在一個整數 n, 使得 $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ 每個整數塗上紅色或藍色, 而它裡面的所有勾股數沒有同色的, 這性質在 $n+1$ 時不存在?」這是一道35年懸而未決的數學難題。2015 年 5 月有三位元電腦教授合寫了一篇論文《布林畢氏三元數問題》, 宣佈解決厄多斯和葛立恒的問題。

葛立恒夫婦和厄多斯



葛立恒

這裡所說的「布林畢氏三元數」(Boolean Pythagorean triple), 就是我們稱爲「勾股數」用兩種顏色著色的問題。

Solving and Verifying the boolean Pythagorean Triples problem via Cube-and-Conquer

Marijn J. H. Heule, Oliver Kullmann, and Victor W. Marek

The University of Texas at Austin, Swansea University, and University of Kentucky

Abstract. The *boolean Pythagorean Triples problem* has been a long-standing open problem in Ramsey Theory: Can the set $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ of natural numbers be divided into two parts, such that no part contains a triple (a, b, c) with $a^2 + b^2 = c^2$? A prize for the solution was offered by Ronald Graham over two decades ago. We solve this problem, proving in fact the impossibility, by using the *Cube-and-Conquer* paradigm, a hybrid SAT method for hard problems, employing both look-ahead and CDCL solvers. An important role is played by dedicated look-ahead heuristics, which indeed allowed to solve the problem on a cluster with 800 cores in about 2 days. Due to the general interest in this mathematical problem, our result requires a formal proof. Exploiting recent progress in unsatisfiability proofs of SAT solvers, we produced and verified a proof in the DRAT format, which is almost 200 terabytes in size. From this we extracted and made available a compressed certificate of 68 gigabytes, that allows anyone to reconstruct the DRAT proof for checking.

1 Introduction

Propositional satisfiability (SAT, for short) is a formalism that allows for representation of all finite-domain constraint satisfaction problems. Consequently, all decision problems in the class NP, as well as all search problems in the class FNP [9,29,35,19], can be polynomially reduced to SAT. Due to great progress with *SAT solvers*, many practically important problems are solved using such reductions. SAT is especially an important tool in hardware verification, for example model checking [8] and reactive systems checking. In this paper we are, however, dealing with a different application of SAT, namely as a tool in computations of configurations in a part of Mathematics called *Extremal Combinatorics*, especially *Ramsey theory*. In this area, the researcher attempts to find various configurations that satisfy some combinatorial conditions, as well as values of various parameters associated with such configurations [49].

One important result of Ramsey theory, the van der Waerden Theorem [45], has been studied by the SAT community, started by [14]. That theorem says that for all natural numbers k and l there is a number n, so that whenever the integers $1, \dots, n$ are partitioned into k sets, there is a set containing an arithmetic progression of length l. A good deal of effort has been spent on specific values of the corresponding number theoretic function, $\mathrm{vdW}(k, l)$. Two results on specific values: $\mathrm{vdW}(2, 6) = 1132$ and $\mathrm{vdW}(3, 4) = 293$, were obtained by M. Kouril

世界最長的數學證明的第一頁

奇妙的勾股數

在中學學幾何, 我們知道任意直角三角形它的三個邊「勾」a,「股」b,「弦」c, 滿足等式:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

中國古代數學著作《周髀算經》(西元前 1 世紀) 就有「勾三股四弦五」的記載, 即 “3, 4, 5” 是勾股數。

《周髀算經》書裡有一段周公與商高有趣的對話: 在西元前 1100 年, 周武王的弟弟周公就曾向當時的一位學者商高求教:「······去天不可階而升, 地不可得尺寸而度, 請問數安從出?」商高所提供的測量方法是「勾股術」:「······ 故折矩, 以爲勾廣三, 股修四, 徑隅五。······」商高利用「勾三股四弦五」的特殊情形進行測量。

顯然如果 (a, b, c) 是勾股數, 則 (ka, kb, kc) 對於任意正整數 k 也是勾股數。

因此我們感興趣的是 (a, b, c) 三數互素的勾股數, 即 $\mathrm{GCD}(a, b, c) = 1$, 我們稱這樣的個數爲素勾股數 (primitive Pythagorean triple)。

歐幾里得在《幾何原本》給出生成勾股數的公式:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

(a, b, c) 是素勾股數當且僅當 $\mathrm{GCD}(a, b, c) = 1$, $m - n$ 是奇數。

例如: 當 $m = 4$, $n = 3$ 時, $a = 4^2 - 3^2 = 7$, $b = 2 \times 4 \times 3 = 24$, $c = 4^2 + 3^2 = 25$ 則 7、24、25 便是一組勾股數。

小於 300 的素勾股數有 47 組:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)
(20, 99, 101)	(60, 91, 109)	(15, 112, 113)	(44, 117, 125)
(88, 105, 137)	(17, 144, 145)	(24, 143, 145)	(51, 140, 149)
(85, 132, 157)	(119, 120, 169)	(52, 165, 173)	(19, 180, 181)
(57, 176, 185)	(104, 153, 185)	(95, 168, 193)	(28, 195, 197)
(84, 187, 205)	(133, 156, 205)	(21, 220, 221)	(140, 171, 221)
(60, 221, 229)	(105, 208, 233)	(120, 209, 241)	(32, 255, 257)
(23, 264, 265)	(96, 247, 265)	(69, 260, 269)	(115, 252, 277)
(160, 231, 281)	(161, 240, 289)	(68, 285, 293)	

觀察這些勾股數可以發現一個規律: 當第一個數是奇數時, 則第二個數是第一個數的平方減去 1 再除以 2, 第三個數是第一個數的平方加上 1 再除以 2 (也是第二個數加上 1), 這就是當 k 是奇數時, k, $(k\times 2-1)/2$, $(k\times 2+1)/2$ ($k\geq 3$, 奇數) 就是一組勾股數。

對於任意偶數 $2n$ ($n>1$), 都可構成一組勾股數: $2n$, $n\times 2-1$、$n\times 2+1$。這是古希臘亞歷山大港的數學家丟番圖 (Diophantus, 生卒年約西元 200∼214 至西元 284∼298) 所發現的。

厄多斯–葛立恒的問題

人類對勾股數的研究有三千年歷史, 在 70 年代葛立恒和厄多斯問:「是否存在一個整數 n, 使得 $1,2,3,4,\ldots,n$ 每個整數塗上紅色或藍色, 而它裡面沒有同色的勾股數, 這性質在 $n+1$ 時不存在?」

比方說取 $n=6$, 我們可以這樣對 1, 2, 3, 4, 5, 6 整數塗上顏色:

紅	1	3	4
藍	5	2	6

(3,4,5) 是勾股數, 3,4 塗紅色則 5 要塗藍色。

而 $n=7$ 時, 底下兩種塗法仍能讓所有勾股數不同色。

紅	1	3	4	
藍	5	2	6	7

紅	1	3	4	7
藍	5	2	6	

爲什麼這個問題難解決呢?

因爲當我們延展 n, 比方說由 7 到 8, 由 8 到 9, 由 9 到 10, 我們要考慮的情形就變得很多。每加入一個新的數字, 就可能會多出一些三陣列, 複雜性就增加了, 因此這種用「窮舉法」的方法是行不通的。

葛立恒給 100 美元作爲解決這個拉姆齊理論 (Ramsey Theory) 範疇長久未解的難題的獎賞。

把問題簡化

美國匈牙利數學家喬治 · 波利亞 (George Pólya, 1887∼1985), 曾在《怎樣解題》(How to Solve It) 一書中建議人們在解決數學問題時, 若解不出這道問題, 便先解一個有關的問題。如果遇到困難可以嘗試把條件改變一些, 先變成容易的問題去考慮, 這樣有助於解題。

因此我們嘗試不考慮勾股數, 而是 (a, b, c) 有 $a + b = c$。

我們就稱「和陣列」, 底下是一些「和陣列」:

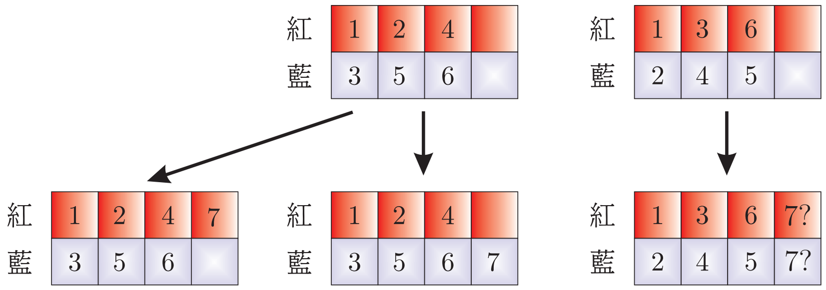
$$(1, 2, 3), \qquad (2, 3, 5), \qquad (1, 4, 5), \qquad (2, 4, 6)$$

我們改寫葛立恒的問題:「是否存在一個 n, 使得 1,2, $\ldots, n$ 的所有和陣列在塗上紅色或藍色後, 沒有和陣列是同色的。而這個性質在 $n + 1$ 時不成立?」

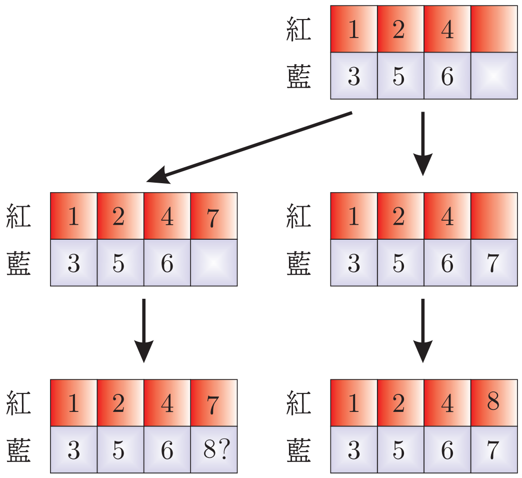
我們就試 $n = 6$, 有兩種著色法還沒有發現同色和陣列:

紅	1	2	4	
藍	3	5	6	
紅	1	3	6	
藍	2	4	5	

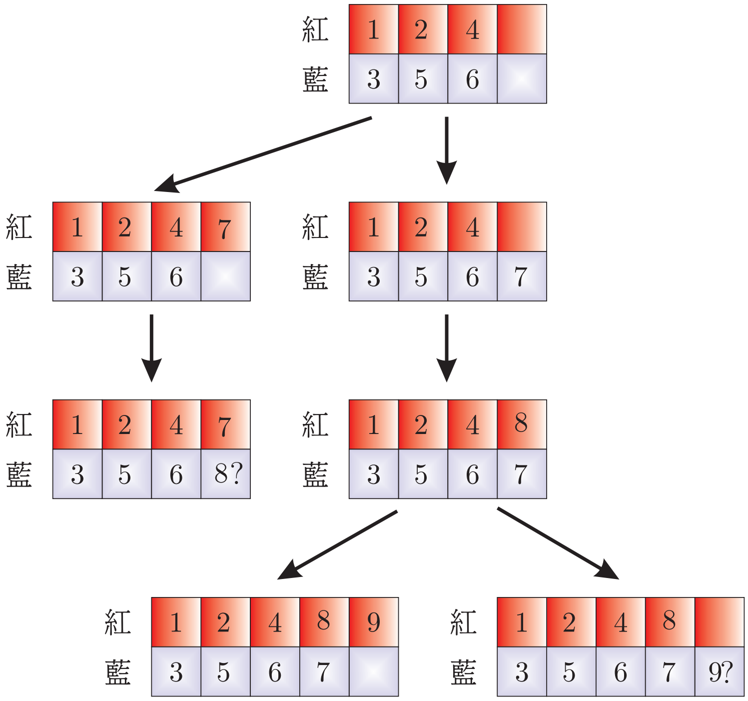
擴大到 $n = 7$, 可以把推理過程用決策樹來描述這個判定過程, 圖所示形象地表示 : 這兩種著色法還沒有發現同色的性質。



擴大到 $n = 8$, 我們發現仍然有這種性質:



擴大到 $n=9$



我們看到9不能塗紅色或藍色, 因此對於這個簡化的問題, 我們找到答案 $n=8$。

德國猶太數學家伊薩 · 蘇 (Issai Schur,1875∼1941) 在上世紀研究和陣列, 導入底下的概念:

定義: 令 S 是半群 $(N,+)$ 的非空集, 對於任何 x,y 在 S 的元素, S 滿足性質: 我們有 $x+y$ 不在 S 裡, 我們稱這個集為非和集 (sum-free set)。

任何奇數集都是非和集。他在 1916 年研究數學的非和集時, 發現了以下定理:

蘇定理: 令 $r \geq 1$, 則存在一個最小的整數 $s(r)$, 使得任意 $N \geq s(r)$, 我們可以用 r 種顏色塗 $\{1,2,\ldots,N\}$, 使得同色 (x,y,z) 三元素滿足 $x+y=z$。

伊薩 · 蘇

他可以利用這個原理, 證明底下與費馬最後定理有關的漂亮定理:

定理: 令 $n > 1$, 存在一個整數 $s(n)$, 使得對於所有的素數 $p > s(n)$, 底下同餘方程

$$x^n + y^n = z^n \pmod p$$

有解, 而 p 不能整除 xyz。

三色畢氏數問題

如果兩色著色問題難以解決, 我們就考慮用三色來著色, 可能就會容易些, 因爲我們的自由度增加了。

我們用綠、橙、黃三色來塗整數, 我們的問題是「是否存在一個 n, 在 $1, 2, \ldots, n$ 每個整數塗上綠色、橙色或黃色, 而它裡面的所有勾股數沒有同色的, 而這個性質在 $n+1$ 時不成立?」

這個問題比二色畢氏數問題簡單許多, 利用我們前面小於 300 的奇勾股數表, 我們很容易驗證 $n = 110$。

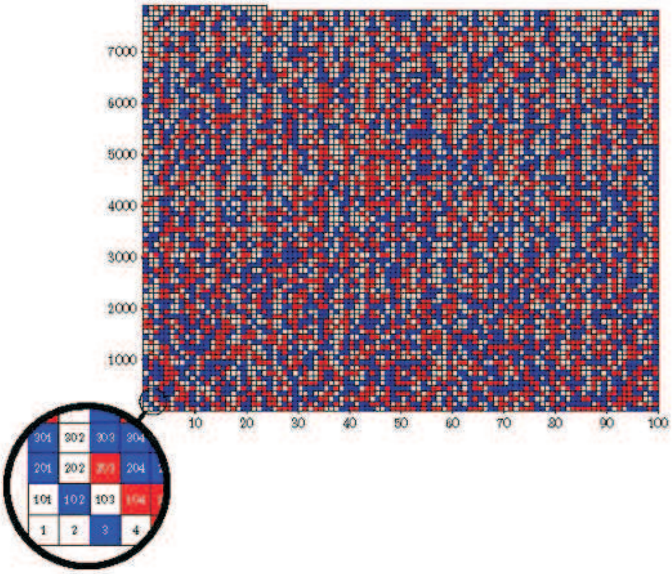
3	4	5			
6	8	10	33	56	65
5	12	13	32	60	68
9	12	15	42	56	70
8	15	17	48	55	73
12	16	20	24	70	74
15	20	25	21	72	75
7	24	25	45	60	75
10	24	26	30	72	78
20	21	29	48	64	80
18	24	30	18	80	82
16	30	34	13	84	85
21	28	35	36	77	85
12	35	37	40	75	85
15	36	39	51	68	85
24	32	40	60	63	87
9	40	41	39	80	89
27	36	45	54	72	90
14	48	50	35	84	91
30	40	50	57	76	95
24	45	51	65	72	97
20	48	52	60	80	100
28	45	53	28	96	100
33	44	55	20	99	101
40	42	58	48	90	102
36	48	60	40	96	104
11	60	61	63	84	105
16	63	65	56	90	106
39	52	65	60	91	109
25	60	65	66	88	110

三俠客出馬

菲勒 (Marijn Heule)、庫曼 (Oliver Kullman) 和馬力克 (Victor Marek) 是德薩斯 (Texas University), 英國斯旺西 (Swansea) 及肯塔西 (Kentucky) 大學的教授, 他們利用「分塊攻克」(Cube and Conquer) 策略證明「布林畢氏三元數問題」(Boolean Pythagorean Triples) 的解是 $n = 7824$。

德薩斯 Stampede 超級電腦

不過, 他們承認要證明他們的解答很難, 因爲在德州先進運算中心超級電腦 (這個電腦有 800 個中央處理器) 協助下產生的證明檔, 大小達到 200TB, 相當於美國國會圖書館所有數碼資料的總和, 這也是人類迄今得到最「長」的一個數學「證明」。



布林畢氏三元數的一個解

Department of Mathematics,
University of California San Diego

* *

Combinatorics Seminar

Marijn Heule
University of Texas

Solving and Verifying the Boolean Pythagorean Triples problems via Cube-and-Conquer

Abstract:

The Boolean Pythagorean Triples problem has been a long-standing open problem in Ramsey Theory: Can the set $N = 1, 2, 3,$ of natural numbers be partitioned into two parts, such that neither part contains a triple (a, b, c) with $a^2 + b^2 = c^2$? A prize for the solution was offered by Ron Graham over two decades ago. We show that such a partition is possible for the set of integers in $[1, 7824]$, but that it is not possible for the set of integers in $[1, M]$ for any $M > 7824$. Of course, it is completely infeasible to attempt prove this directly by examining all 2^M possible partitions of $[1, M]$ when $M = 7825$, for example. We solve this problem by using the Cube-and-Conquer paradigm, a hybrid SAT method for hard problems, employing both look-ahead and CDCL solvers. An important role is played by dedicated look-ahead heuristics, which indeed allowed us to solve the problem on a cluster with 800 cores in about 2 days. Due to the general interest in this mathematical problem, our result requires a formal proof. Exploiting recent progress in unsatisfiability proofs of SAT solvers, we produced and verified a proof in the DRAT format, which is almost 200 terabytes in size. From this we extracted and made available a compressed certificate of 68 gigabytes, that allows anyone to reconstruct the DRAT proof for checking. These techniques show great promise for attacking a variety of similar computational problems arising in combinatorics and computer science.

Host: Ron Graham

Thursday, April 14, 2016
3:00 PM
AP&M 7421

* *

菲勒教授到葛立恒所在的大學演講海報。

證明顯示一直到 7824 這個數爲止, 這種著色方式是可能的, 換句話說, 在加入 7825 之前所有合理的著色方法, 這些數字裡至少有一對同時爲紅色, 而至少還有一對同時爲藍色, 所以新加入了 7825 後就無法繼續著色。可是超過這個數字就不行, 當 $n = 7825$ 時, 就找不到解。加入 7825 這個數字的時候, 形成的新圖達到了「不管怎樣著色都會有某個三陣列同色」的要求。$\{1, 2, \ldots, 7825\}$ 有 102300 種著色方法, 研究人員利用對稱性和數論技術設法將電腦需要檢查的可能著色方法減少到 1 萬億以內, 然後 Stampede 超級電腦足足跑了兩天才得到這種證明。

他們的論文和資料佔據電腦容量200terabytes, 這個量是多大呢?

俄國作家列夫 · 托爾斯泰 (Leo Tolstoy, 1828∼1910) 歷時六年寫的《戰爭與和平》是公認最長的巨著, 被稱爲「世界上最偉大的小說」, 作品被譯爲各國文字, 銷售量累積超過 5 億冊。

一個 terabyte 的電腦儲存容量單位, 也常用 TB 來表示。1TB=1024GB=240 位元組, 相當於 337920 本《戰爭與和平》。200 terabyte 相當於 6 千萬本《戰爭與和平》, 也差不多是美國國會圖書館的藏書量。以一目十行的速度要把論文全部讀完估計要花 10 億年的時間!

菲勒、庫曼和馬力克在去年 5 月把論文發表在預印本網站上, 而菲勒教授在 2016 年 4 月 14 日到葛立恒所在的加州大學聖地牙哥分校 (University of California, San Diego) 給一個演講。馬丁 · 加德納曾說:「生命太短了, 不該浪費時間去檢驗一個複雜而錯誤可能性又非常大的證明。」菲勒、庫曼和馬力克的主要貢獻在於運用電子電腦完成了這件人類無法完成的事, 解決了人們多年來無法解決的理論問題。它表明, 靠人與機器合作, 有可能完成連最著名的數學家至今也束手無策的工作。而論文的複雜性使人們幾乎無法檢查細節。菲勒希望能夠找到 7825 在二色著色沒有同色的畢氏三元數的直接證明。

現在, 會有不少數學家尋找一種同色的畢氏三元數更簡潔的書面證明方法。

20 多年來許多研究者一直努力利用電腦來解決這個問題都沒有成功。2008 年南卡羅來納大學的庫柏 (Joshua Cooper) 及在維吉尼亞理工學院的波賴爾 (Chris Poirel) 用幾百個小時算出 1 到 1344 的整數集合, 都沒有同色的畢氏三元數。2012 年庫柏的碩士學生 (W. Kay) 證明了 1 到 1514 的整數集合, 都有二色著色沒有同色的畢氏三元數。

動腦筋, 算算看!

1. 是否存在一個 n, 在 $1, 2, \ldots, n$ 每個整數塗上紅色或藍色, 而裡面所有 (x, y, z) 滿足

   (1) $x+y=2z$
   (2) $x+y=3z$
   (3) $2x+y=z$
   (4) $2x+3y=z$
   (5) $x^2+y=z$
   (1) $x^2+y^2=z$

   沒有同色, 且這個性質在 $n+1$ 時不成立?

2. 是否存在一個 n, 在 $1, 2, \ldots, n$ 每個整數塗上綠色, 紅色或藍色, 而它裡面的所有 (x, y, z) 滿足

   (1) $x+y=2z$
   (2) $x+y=3z$
   (3) $2x+y=z$
   (4) $2x+3y=z$
   (5) $x^2+y=z$

(6) $x^2 + y^2 = z$

沒有同色, 且這個性質在 $n+1$ 時不成立?

讀者可以將結果發送電子郵件至:(1) lixueshu2014@gmail.com (2) sinminlee@gmail.com 和我討論。

參考文獻

1. Joshua Cooper and Chris Poirel, *Note on the Pythagorean Triple System*, 2008, URL http://www.math.sc.edu/~cooper/pth.pdf.
2. M. J. H. Heule, O. Kullmann and V. W. Marek, Preprint at http://arxiv.org/abs/1605.00723, 2016.
3. W. Kay, An overview of the constructive local lemma, Master's Thesis, University of South Carolina, 2012.
4. B. Konev and A. Lisitsa, Preprint at http://arxiv.org/abs/1402.2184, 2014.
5. I. Schur, Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m (\bmod p)$, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 25, 114-117, 1916.
6. T. Tao, Preprint at http://arxiv.org/abs/1509.05363, 2015.
7. R. Graham, *Old and New Problems and Results in Ramsey Theory.*
8. R. Graham, Some of my favorite problems in Ramsey theory, *Comb. Number Theory*, 7(2), 229-236, 2007.
9. R. Graham, B. Rothschild and J. H. Spencer, *Ramsey Theory* (2nd ed.), John Wiley and Sons, New York, 1990.
10. A. Soifer, (Ed) *Ramsey Theory, Yesterday, Today, and Tomorrow*, Birkhauser, 2011
11. G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1967. 有兩個中譯本《一個數學家的辯白》(1) 王希勇譯, 商務印書館, 2007; (2) 李文林、戴宗鐸、高嵘譯, 大連理工大學出版社, 2014。
12. 李學數。數學與數學家的故事。第 1 冊《20世紀數學論文最多的數學家—-紀念保羅 厄多斯》, 上海科學技術出版社, 2015。

—本文作者任教美國聖荷西大學—